**Newton Verfahren**

Erklärung:

Mit dem Newton-Verfahren (oder auch Newton Raphson Verfahren) kann man die Nullstellen einer Funktion näherungsweise bestimmen. Beim Newton Verfahren wird ein Anfangswert in eine Formel und anschließend das erhaltene Ergebnis erneut in die Formel eingesetzt. Führt man das fort, so erhält man im Idealfall ein immer besseres Ergebnis für eine Nullstelle der Funktion. Die Berechnung der Nullstelle erfolgt also näherungsweise. Ein solches Verfahren nennt man Iterationsverfahren.

Formel:

Die Formel für das Newton-Verfahren sieht folgendermaßen aus:

x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}

Die Formel wird Iterationsformel genannt. x_{n+1} ist der neue Wert, der berechnet wird und x_{n} ist der Wert, der im vorherigen Schritt ermittelt wurde.

Beispiel:

Für die Funktion f(x)=x^3+2x+5 lautet die Iterationsformel folgendermaßen:

x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3+2x_n+5}{3x_n^2+2}

Herleitung:

Wir beginnen damit, dass wir die allgemeine Tangentengleichung aufschreiben:

t(x) = mx + b

Darin ist m die Steigung der Tangente und b der y-Achsenabschnitt. Da wir die Tangente betrachten, die an der Stelle x0 an der Kurve von f(x) anliegt, muss die Steigung der Tangente der Steigung der Kurve an genau dieser Stelle entsprechen. Wir können m also über die Ableitung von f(x) an der Stelle x0 ausdrücken:

m = f‘(x0)

Konvergenz:

Ob das Newtonverfahren immer zum Ziel führt, hängt wie schon erwähnt von der Wahl des Startwertes x_0 ab. Die Folge der berechneten Werte x_0, x_1, x_2, ... konvergiert nur dann mit Sicherheit, wenn der Startpunkt x_0 schon ausreichend nahe an der gesuchten Nullstelle liegt. Die Newtoniteration stellt also ein lokal konvergentes Verfahren dar. Der Bereich um die Nullstelle, innerhalb dessen man den Startwert wählen darf, sodass das Verfahren garantiert konvergiert, wird Konvergenzbereich genannt.

Liegt der Startwert x_0 außerhalb des Konvergenzbereichs, so kann die Folge divergieren, oszillieren oder auch gegen eine andere Nullstelle der Funktion konvergieren.

Varianten des Newton-Verfahrens

Das größte Problem bei der Anwendung des [Newton-Verfahrens](https://mathepedia.de/Newton-Verfahren.html) liegt darin, dass man die [erste Ableitung](https://mathepedia.de/Differentialrechnung_Reelle_Funktionen.html) der [Funktion](https://mathepedia.de/Abbildungen_und_Funktionen.html) benötigt. Die Berechnung dieser ist meist aufwändig und in vielen Anwendungen ist eine [Funktion](https://mathepedia.de/Abbildungen_und_Funktionen.html) auch nicht explizit, sondern beispielsweise nur durch ein Computerprogramm gegeben. Im Eindimensionalen ist dann die [Regula Falsi](https://mathepedia.de/Regula_Falsi.html) vorzuziehen, bei der die [Sekante](https://mathepedia.de/Der_Kreis.html) und nicht die [Tangente](https://mathepedia.de/Der_Kreis.html) benutzt wird. Im Mehrdimensionalen muss man andere Alternativen suchen. Hier ist das Problem auch dramatischer, da die [Ableitung](https://mathepedia.de/Differentialrechnung_Reelle_Funktionen.html) eine [Matrix](https://mathepedia.de/Matrizen.html) mit n^2n2 Einträgen ist, der Aufwand der Berechnung steigt also quadratisch mit der [Dimension](https://mathepedia.de/Dimension.html).

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Statt die [Ableitung](https://mathepedia.de/Differentialrechnung_Reelle_Funktionen.html) in jedem Newton-Schritt auszurechnen, ist es auch möglich, sie nur in jedem n-ten Schritt zu berechnen. Dies senkt die Kosten für einen Iterationsschritt drastisch, der Preis ist ein Verlust an Konvergenzgeschwindigkeit. Die Konvergenz ist dann nicht mehr quadratisch, es kann aber weiterhin superlineare Konvergenz erreicht werden.

Inexakte Newton-Verfahren

Eine ähnliche Idee besteht darin, in jedem Schritt eine [Approximation](https://mathepedia.de/Approximation.html) der [Ableitung](https://mathepedia.de/Differentialrechnung_Reelle_Funktionen.html) zu berechnen, beispielsweise über finite Differenzen. Eine quantitative Konvergenzaussage ist in diesem Fall schwierig, als Faustregel lässt sich jedoch sagen, dass die Konvergenz schlechter wird, je schlechter die [Approximation](https://mathepedia.de/Approximation.html) der [Ableitung](https://mathepedia.de/Differentialrechnung_Reelle_Funktionen.html) ist.

Newton-Krylow-Verfahren

Für die numerische Lösung nichtlinearer [partieller Differentialgleichungen](https://mathepedia.de/Partielle_Differentialgleichungen.html) bietet sich prinzipiell das [Newton-Verfahren](https://mathepedia.de/Newton-Verfahren.html) als Grundlöser an. Die entsprechende [Jacobi-Matrix](https://mathepedia.de/Jacobi-Matrix.html) ist immer dünnbesetzt und so bieten sich [Krylow-Unterraum-Verfahren](https://mathepedia.de/Krylow-Unterraum-Verfahren.html) zur Lösung der [linearen Gleichungssysteme](https://mathepedia.de/Lineare_Gleichungssysteme.html) an. Man spricht dann von Newton-Krylow-Verfahren. Im Krylow-Verfahren selbst tritt die [Jacobi-Matrix](https://mathepedia.de/Jacobi-Matrix.html) nur in Matrix-Vektorprodukten auf, welche als [Richtungsableitungen](https://mathepedia.de/Richtungsableitung.html) interpretiert werden können. Approximiert man diese durch Finite Differenzen, so erhält man komplett matrixfreie Verfahren.